「解答例」

選抜区分	2022 年度　（選抜区分：一般選抜） 経済学部　　（科目名：数学）

問題１

(1) 数列 $\{a_n\}$ は等差数列であるから, 公差を d $(d>0)$ とおくと, $a_2=a_1+d$ である. 条件より,

$$a_1+a_2=2a_1+d=0$$

よって, $d=-2a_1$ であり, $d>0$ なので, $a_1<0$ である.
条件より,

$$a_1\cdot a_2=a_1(a_1+d)=a_1(a_1-2a_1)=-a_1^2=-1$$

であり, $a_1<0$ なので, $a_1=-1$, $d=2$ となる.

数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=a_1+2(n-1)=2n-3$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である.（答）

(2) 与式より,

$$2S_{n+1}=3b_{n+1}+a_{n+1}-3 \qquad \cdots ①$$
$$2S_n=3b_n+a_n-3 \qquad \cdots ②$$

$S_{n+1}-S_n=b_{n+1},\ a_{n+1}-a_n=2$ なので, ① − ②より,

$$2b_{n+1}=3(b_{n+1}-b_n)+2$$

よって, $b_{n+1}=3b_n-2$ である. $\cdots$（答）

(3) $n=1$ のとき, $b_1=S_1$ である. 与式より,

$$2b_1=3b_1+a_1-3$$

であるから, $b_1=3-a_1=4$ である. $b_{n+1}=3b_n-2$ より, $b_{n+1}-1=3(b_n-1)$ と書き換えられる. 数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=3$, 公比 3 の等比数列であるから

$$b_n-1=3\cdot 3^{n-1}=3^n$$

したがって, $\{b_n\}$ の一般項は $b_n=3^n+1$ $(n=1,2,3,\cdots)$ である. $\cdots$（答）

(4) $a_k(b_k-1)=(2k-3)3^k=2k\cdot 3^k-3^{k+1}$ であるから,

$$T_n=2\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^k)-\sum_{k=1}^{n}3^{k+1}$$

となる. ここで,

$$T'_n=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^k) \qquad \cdots ③$$

と定義する. さらに,

$$3T'_n=\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^{k+1})=\sum_{k=1}^{n}(k+1)3^{k+1}-\sum_{k=1}^{n}3^{k+1} \qquad \cdots ④$$

④ − ③より,

$$
\begin{aligned}
3T_n' - T_n' = 2T_n' &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot 3^{k+1} - \sum_{k=1}^{n}(k\cdot 3^k) - \sum_{k=1}^{n}3^{k+1} \\
&= (n+1)\cdot 3^{n+1} - (1\cdot 3^1) - \sum_{k=1}^{n}3^{k+1} \\
&= (n+1)\cdot 3^{n+1} - 3 - \sum_{k=1}^{n}3^{k+1}
\end{aligned}
$$

T_n に代入すると

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2T_n' - \sum_{k=1}^{n}3^{k+1} \\
&= (n+1)\cdot 3^{n+1} - 3 - 2\sum_{k=1}^{n}3^{k+1} \\
&= (n+1)\cdot 3^{n+1} - 3 - 9(3^n - 1) \\
&= (n-2)3^{n+1} + 6
\end{aligned}
$$

である. $\cdots$（答）

(5) T_n は, 単調に増えていく. $T_4 = 492$, $T_5 = 2193$ であるので, $n = 5$ である. $\cdots$（答）

問題２

(1) $y = f(x) = x^2 + (a-1)x + 1$ の判別式 $D = (a-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow (a-3)(a+1) > 0$. よって $a > 3$ または $a < -1$.

(2) $a = 0, b = 0$ のとき $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3$. $k > 0$ より以下の与式の真数条件が満たされている. したがって

$$
\begin{aligned}
&\log_3 \frac{1}{3}\frac{k^3}{\sqrt{k}} = -\log_3 3 + \log_3 k^{3-\frac{1}{2}} = -1 + \frac{5}{2}\log_3 k = \frac{13}{2} \\
&\Leftrightarrow \log_3 k = 3.
\end{aligned}
$$

よって $k = 27$. このもとで与えられた積分を計算すると

$$
\int_0^{\frac{27}{9}-1}(x^2 - x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 + 2 = \frac{8}{3}.
$$

(3) $y = f(x) = x^2 + 1$ と $y = g(x) = \frac{1}{3}x^3 - b$ の交点は $y = h(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 1$ と $y = b$ の交点を考えることと同値である.

$$
h'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)
$$

と増減表により

x		0		2	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{7}{3}$	$\nearrow$

$y = h(x)$ は $x = 0$ のとき極大値 $h(0) = -1$, $x = 2$ のとき極小値 $h(2) = \frac{8}{3} - 4 - 1 = -\frac{7}{3}$ をとる. したがって求める b の範囲は $-\frac{7}{3} < b < -1$.

(4) $a=0, b=0$ のとき $f(x)=x^2-x+1,\ g(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ である. $y=g(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ 上の点を $P(p, \frac{1}{3}p^3)$ とおく. すると点 P での接線の方程式は次のように表せる.

$$y-\frac{1}{3}p^3=g'(p)(x-p)=p^2(x-p)$$
$$\Leftrightarrow y=p^2x-\frac{2}{3}p^3 \qquad \cdots ①$$

接線① と $y=f(x)=x^2-x+1$ の交点は以下の方程式で表される.

$$x^2-(1+p^2)x+1+\frac{2}{3}p^3=0 \qquad \cdots ②$$

この方程式の異なる 2 つの解をそれぞれ α, β とおくと解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=1+p^2 \qquad \cdots ③$$
$$\alpha\beta=1+\frac{2}{3}p^3$$

交点の中点の x 座標の値が 5 なので③ より $\alpha+\beta=10 \Leftrightarrow 1+p^2=10$ つまり $p=\pm 3$ を得るので, ②より, $x^2-10x+19=0$ または $x^2-10x-17=0$ となる.

2 つとも異なる 2 つの実数解をもつことから $p=3$ と $p=-3$ はともに題意を満たす. したがって, $p=\pm 3$ を① に代入すると求める接線の方程式は, $y=9x-18$ と $y=9x+18$ となる.

問題３

(1) 余弦定理より,

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2+BD^2-2\cdot AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB \\ &= (\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{6})^2-2\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 3-2\sqrt{3}+1+6-2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \\ &= 10-2\sqrt{3}-6+2\sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

AB>0 であるから, AB$=2$ である.

(2) 正弦定理より,

$$R=\frac{AB}{2\sin\angle ADB}=\frac{2}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

(3) 正弦定理, 加法定理より,

$$\begin{aligned} AC &= 2R\sin\angle CDA=2\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 75^\circ \\ &= 2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4} \\ &= 1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

(4) 条件より, $\angle ECD=\angle BCA$ であり, 円周角の定理より $\angle EDC=\angle BAC$ である. よって三角形 ECD と三角形 BCA は相似である.

(5) (4) より, 三角形 ECD と三角形 BCA は相似なので, $DE:DC=AB:AC$ であるので,

$$AB\times CD=AC\times DE \qquad \cdots ①$$

また条件より, $\angle ECD = \angle BCA$ で, $\angle ECA$ は共通であるから, $\angle BCE = \angle ACD$
円周角の定理から, $\angle CBE = \angle CAD$ なので, 三角形EBCと三角形DACは相似である. よって, $BE : BC = AD : AC$ であるので,

$$BC \times AD = AC \times BE \qquad \cdots ②$$

①, ②より

$$AB \times CD + BC \times AD = AC \times DE + AC \times BE = AC \times (DE + BE) = AC \times BD$$

別解
各辺の長さを求めると, $AB = 2$, $AC = 1 + \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{3} - 1$, $BD = \sqrt{6}$, $BC = \sqrt{2}$, $CD = 2\sqrt{2}$ である.
$AB \times CD + BC \times AD = 2 \times 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \times (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{6}(1 + \sqrt{3})$
$AC \times BD = (1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{6}$ であるから, $AB \times CD + BC \times AD = AC \times DE + AC \times BE = AC \times (DE + BE) = AC \times BD$ である.

問題４

(1) $\sqrt{x} + 2xy + y = 2$ を解くと, $y = \frac{2-\sqrt{x}}{2x+1}$ となるから,
$x = 0$ のとき $y = 2$,　$x = 1$ のとき $y = \frac{1}{3}$,
$x = 2$ のとき $y = \frac{1}{5}\left(2 - \sqrt{2}\right)$,　$x = 3$ のとき $y = \frac{1}{7}\left(2 - \sqrt{3}\right)$,
$x = 4$ のとき $y = 0$,　$x = 5$ のとき $y = \frac{1}{11}\left(2 - \sqrt{5}\right)$,
$x = 6$ のとき $y = \frac{1}{13}\left(2 - \sqrt{6}\right)$,　$x = 7$ のとき $y = \frac{1}{15}\left(2 - \sqrt{7}\right)$,
$x = 8$ のとき $y = \frac{2}{17}\left(1 - \sqrt{2}\right)$,　$x = 9$ のとき $y = -\frac{1}{19}$ となる.
したがって, 求める確率は $\frac{1}{10}$.

(2) $y > 0$ となるのは, $x = 0, 1, 2, 3$ のときだから, 求める確率は $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

(3) y が無理数となるのは, $x = 2, 3, 5, 6, 7, 8$ のときだから, 求める確率は $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

(4) $(y + 2)\left(5y + \sqrt{2} - 2\right)\left(13y + \sqrt{6} - 2\right) = 0$ となるのは, $x = 2, 6$ のときだから, 求める確率は $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

(5) y が無理数でありかつ x が 3 の倍数である確率は $\frac{1}{5}$ である. よって, (3) より求める確率は

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$